

**MATEMATICĂ.**  
**CULEGERE DE PROBLEME**  
CLASA A IX-A - profil pedagogic

CUVÂNT ÎNAINTE.....	3
ARGUMENT .....	5
CAPITOLUL I – MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ .....	7
<i>I 1. Operații cu numere reale .....</i>	<i>7</i>
<i>I 2. Ordonarea numerelor reale .....</i>	<i>9</i>
<i>I 3. Modulul unui număr real .....</i>	<i>11</i>
<i>I 4. Aproximări prin lipsă sau prin adaos. Partea întreagă.     Partea fracționară .....</i>	<i>13</i>
<i>I 5. Operații cu intervale de numere reale .....</i>	<i>16</i>
<i>I 6. Elemente de logică matematică. Propoziție, predicat,     cuantificatori .....</i>	<i>17</i>
<i>I 7. Operații logice elementare cu propoziții .....</i>	<i>19</i>
<i>I 8. Operații logice elementare cu predicate. Operații și relații     cu mulțimi .....</i>	<i>21</i>
<i>I 9. Exerciții recapitulative (teste de antrenament 2020) .....</i>	<i>23</i>
CAPITOLUL II – ȘIRURI.....	24
<i>II 1. Șiruri de numere reale.....</i>	<i>24</i>
<i>II 2. Progresii aritmetice .....</i>	<i>25</i>
<i>II 3. Progresii geometrice.....</i>	<i>26</i>
<i>II 4. Exerciții recapitulative (teste de antrenament 2020, 2021) .....</i>	<i>28</i>
CAPITOLUL III – FUNCȚII. LECTURI GRAFICE.....	29
<i>III 1. Reper cartezian. Produs cartezian.....</i>	<i>29</i>
<i>III 2. Funcții.....</i>	<i>30</i>

III 3. Funcții numerice .....	32
III 4. Proprietăți generale ale funcțiilor .....	34
III 5. Exerciții recapitulative .....	36
CAPITOLUL IV – FUNCȚIA DE GRADUL I.....	37
IV 1. Definiția funcției de gradul I. Reprezentarea grafică a funcției de gradul I.....	37
IV 2. Ecuația de gradul I .....	38
IV 3. Monotonia funcției de gradul I.....	40
IV 4. Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I .....	42
IV 5. Pozițiile relative a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I cu 2 necunoscute.....	43
IV 6. Probleme recapitulative (teste de antrenament 2021, 2022) .....	44
CAPITOLUL V – FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA .....	46
V 1. Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $fx = ax^2 + bx + c$ , $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .....	46
V 2. Intersecția graficului funcției de gradul al doilea cu axele de coordonate. Ecuația de gradul al doilea .....	47
V 3. Relațiile lui Viète. Rezolvarea sistemelor de forma $x + y = s, xy = p$ cu $s, p$ reale .....	49
V 4. Probleme recapitulative (teste de antrenament 2020, 2021) .....	51
CAPITOLUL VI – INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A PROPRIETĂȚILOR ALGEBRICE ALE FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA.....	53

VI 1. Monotonie, punct de extrem, interpretare geometrică .....	53
VI 2. Poziționarea parabolei față de axa Ox, semnul funcției de gradul al doilea. Inecuații de forma.....	55
$ax^2 + bx + c \leq 0 \geq, <, >, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .....	55
VI 3. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă. Rezolvarea sistemelor de forma $mx + n = y, ax^2 + bx + c = y$ cu $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .....	57
VI 4. Probleme recapitulative (teste de antrenament 2020, 2021) .....	58
CAPITOLUL VII – VECTORI ÎN PLAN .....	60
VII 1. Segment orientat, vectori, vectori coliniari .....	60
VII 2. Operații cu vectori. Adunarea .....	61
VII 3. Înmulțirea cu scalari.....	63
VII 4. Condiția de coliniaritate. Descompunerea după doi vectori necoliniari, nenuli .....	65
VII 5. Probleme recapitulative .....	66
CAPITOLUL VIII – COLINIARITATE, CONCURENȚĂ, PARALELISM .....	68
VIII 1. Vectorul de poziție al unui punct .....	68
VIII 2. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat. Teorema lui Thales .....	69
VIII 3. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi .....	70
VIII 4. Probleme recapitulative .....	71
CAPITOLUL IX – APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE .....	73

# CAPITOLUL I - MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

## I 1. Operații cu numere reale

1. Calculați:

a)  $\left[ \left( 6\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6} \right) - 2 \cdot 0,1 \right] : \frac{5}{60}$

b)  $\left( \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{6} - \frac{2}{4} \right) : \frac{1}{125}$

c)  $\left( \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{10} \right) \cdot \frac{2}{3} - 1$

d)  $\frac{3}{6} \cdot \frac{8}{5} + \frac{40}{100} : \frac{10}{3} - (-1)^{50}$

2. Calculați:

a)  $(0,5 \cdot 2 + 0,04 \cdot 25 - 0,02 \cdot 100)^2 + (-1)^{2021}$

b)  $(0,3 \cdot 3 + 0,02 \cdot 26 - 0,14 : 7 - 0,9)^2 : 25$

c)  $\left[ 0, (3) : \frac{3}{2} \cdot 9 + 1,5 \cdot 0, (6) - 0,12(1) \cdot \frac{900}{109} \right]^{10} : 2^9$

d)  $[0, (23) + 0,2(3) - 0,1(23)] \cdot 990$

3. Calculați:

a)  $4\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + \sqrt{363}$

b)  $(2\sqrt{48} + \sqrt{125} - 5\sqrt{5} + \sqrt{75}) : \sqrt{3}$

c)  $(3\sqrt{24} + 2\sqrt{6} - \sqrt{54}) : 5\sqrt{6}$

d)  $(\sqrt{50} + 3\sqrt{8} - 11\sqrt{2})^{205}$

4. Calculați:

a)  $(2\sqrt{3} - 2)(2\sqrt{3} + 2) - (\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})$

b)  $(3\sqrt{2} + 2)^2 + (3\sqrt{2} - 2)^2 + 2(3\sqrt{2} + 2)(3\sqrt{2} - 2)$

c)  $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6} - \sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{3})$

d)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

5. Folosind formulele de calcul prescurtat să se calculeze:

a)  $(\sqrt{5} - 1)^2$

b)  $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2$

c)  $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

d)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$

6. Să se calculeze:

a)  $\frac{1}{8-3\sqrt{7}} + \frac{1}{8+3\sqrt{7}}$

b)  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{3-\sqrt{6}}$

c)  $\frac{11}{2\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}}$

d)  $\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

7. a) Dacă  $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$  calculați  $a^{-1}$

b) Dacă  $a = 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$  calculați  $a^{-1}$

c) Dacă  $a = \sqrt{2} - 1$  calculați  $a^{-2}$

d) Dacă  $a = 2 - \sqrt{3}$  calculați  $a^{-3}$

8. Calculați media aritmetică și media geometrică a celor două numere:

a)  $a = \sqrt{4} - \sqrt{3}$ ,  $b = \sqrt{4} + \sqrt{3}$

b)  $a = \sqrt{8} - \sqrt{7}$ ,  $b = \sqrt{8} + \sqrt{7}$

9. Efectuați:

a)  $\left(\frac{7}{48} + \frac{13}{36} + \frac{1}{4}\right) : \frac{109}{144} - 1$

b)  $\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{8}{3} + \frac{5}{6}$

c)  $\left(\frac{2}{36} + \frac{1}{12} - \frac{5}{9}\right) : \frac{15}{18} + \frac{1}{2}$

d)  $\frac{11}{7} : \left(\frac{3}{12} + \frac{1}{18}\right) \cdot \frac{7}{36} - (-1)^{20}$

e)  $2^{30} \cdot 3^{30} : 6^{29}$

f)  $(3^{25} - 3^{24}) : 2$

g)  $(2^{-3} + \frac{7}{8}) \cdot 2^4$

10. Calculați:

a)  $1,2(3) + 2,1(5)$

b)  $4^{12} \cdot 2^{-3} : 16^5$

c)  $6^3 : 2^3 + \frac{10^4}{5^4} + (-1)^{10}$

d)  $(-1)^5 + (-1)^{105} + (-1)^{205} + 3$

## I 2. Ordonarea numerelor reale

1. Să se ordoneze crescător numerele:

a)  $a = 3,26$ ;  $b = 3,(26)$ ;  $c = 3,2(6)$

b)  $a = 2,5$ ;  $b = 2,(5)$ ;  $c = 2,5(6)$

c)  $a = 3,1(23)$ ;  $b = 3,(123)$ ;  $c = 3,123$

d)  $a = 2,2(5)$ ;  $b = 2,(25)$ ;  $c = 2,25$

2. Să se ordoneze crescător numerele:

a)  $x = -\frac{11}{2}$ ;  $y = 2\frac{3}{7}$ ;  $z = -\frac{25}{7}$

b)  $x = -\frac{9}{4}$ ;  $y = -2,5$ ;  $z = -2$

c)  $x = -\frac{3}{7}$ ;  $y = -\frac{7}{3}$ ;  $z = -\frac{48}{21}$

d)  $x = \frac{11}{3}$ ;  $y = \frac{11}{4}$ ;  $z = \frac{12}{5}$

3. Ordonăți crescător:

a)  $a = 3\sqrt{2}$   $b = 2\sqrt{3}$   $c = \sqrt{11}$

b)  $a = -11,2$   $b = -\frac{23}{2}$   $c = -\sqrt{121}$

c)  $a = 8\sqrt{2}$   $b = 11$   $c = 5\sqrt{5}$

d)  $a = 12$   $b = \sqrt{145}$   $c = 2\sqrt{30}$

4. Comparați numerele  $x$  și  $y$ :

a)  $x = \sqrt{20}$   $y = 4,2$

b)  $x = -\sqrt{36}$   $y = -\frac{19}{3}$

c)  $x = \sqrt{31}$   $y = 6$

d)  $x = \frac{1}{\sqrt{32}}$   $y = \sqrt{30}^{-1}$

5. a) Demonstrați că dacă  $x, y \geq 0$ ,  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

b) Demonstrați că dacă  $x, y > 0$ ,  $\sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$

c) Demonstrați că dacă  $x, y \geq 0$ ,  $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

d) Demonstrați că  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0$

6. Comparați numerele a și b:

a)  $a = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$  și  $b = \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$

b)  $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$  și  $b = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

c)  $a = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$  și  $b = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}$

d)  $a = \frac{1}{2\sqrt{6}}$  și  $b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. Comparați:

a)  $2\sqrt{6}$  și 5

b)  $\sqrt{31}$  și  $4\sqrt{2}$

c)  $2\sqrt{2}$  și 3

d) 9 și  $4\sqrt{5}$

8. Comparați:

a)  $10^{-2}$  și  $\frac{1}{99}$

b)  $(2\sqrt{3})^{-1}$  și  $\frac{\sqrt{3}}{12}$

c)  $(3\sqrt{2})^{-1}$  și  $(\sqrt{17})^{-1}$

d)  $\frac{2}{3\sqrt{7}}$  și  $\frac{1}{\sqrt{15}}$

9. Comparați:

a)  $-3$  și  $-\sqrt{10}$

b)  $-2$  și  $-2,7$

c)  $-\sqrt{3}$  și  $-2$

d)  $\sqrt{2}$  și  $1$

10. Comparați:

a)  $4\sqrt{6}$  și  $6\sqrt{4}$

b)  $\frac{11}{2\sqrt{3}}$  și  $\sqrt{2}$

c)  $3\sqrt{2}$  și  $\frac{18}{3\sqrt{2}}$

d)  $\frac{2\sqrt{5}}{4}$  și  $(\sqrt{2})^{-2}$

### I 3. Modulul unui număr real

1. Calculați:

b)  $|3 - 2\sqrt{2}|$

c)  $|12 - \sqrt{145}|$

d)  $|-8| + |9 - 4\sqrt{5}|$

e)  $|2\sqrt{6} - 5| + \sqrt{24}$

2. Calculați:

a)  $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$

b)  $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}$

c)  $\sqrt{(4\sqrt{2} - \sqrt{33})^2}$

d)  $\sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2}$

3. Explicitați:

a)  $|x + 1|$

b)  $|3x - 2|$

c)  $|2x + 4|$

d)  $|3 - x|$

4. Rezolvați ecuațiile:

a)  $|x| = 3$

b)  $|x| = 0$

c)  $|x| = -1$

d)  $|x| = 2$

5. Rezolvați ecuațiile:

a)  $|x + 1| = 2$                       b)  $|3x - 1| = 2$

c)  $|5 - x| = 0$                       d)  $|2 - 3x| = -2$

6. Rezolvați ecuațiile:

a)  $|x| = |2x + 1|$

b)  $|2x + 5| = |7x|$

c)  $|3x - 5| = -|x|$

d)  $|2x + 1| = |4x - 1|$

7. Rezolvați ecuațiile:

a)  $\left| \frac{x - \frac{1}{2}}{x + 1} \right| = 0$

b)  $\left| \frac{x - 2}{x} \right| = 1$

c)  $\left| \frac{2x + 1}{2x - 5} \right| = 1$

d)  $\left| \frac{x}{x + 2} \right| = -2$

8. Rezolvați ecuațiile:

a)  $||x| - 2| = 0$

b)  $|2|x| - 4| = 2$

c)  $|3 - |x|| = 2$

d)  $|2 - |x + 1|| = -2$

9. Rezolvați ecuațiile:

a)  $|x + 1| + |2x + 2| = 0$

b)  $|3x - 3| + |4x - 4| = 0$

c)  $|x^2 - 1| + |2x - 2| = 0$

d)  $|x + 3| + |9 + 3x| = 0$

10. Rezolvați ecuațiile:

a)  $|2x + 3| = 0$

b)  $|2x - 5| = x$

c)  $|3x - 7| = |3x + 1|$

d)  $\left| \frac{2x+1}{3-x} \right| = 1$

11. Rezolvați inecuațiile:

a)  $|x| \leq 3$

b)  $|2x + 1| < 1$

c)  $|3x - 2| < 0$

d)  $|2x - 7| \geq 0$

12. Rezolvați inecuațiile:

a)  $|10x - 5| \geq -2$

b)  $|2x + 3| \leq 0$

c)  $|7x - 1| \leq 6$

d)  $|2x + 4| \geq 5$

## I 4. Aproximări prin lipsă sau prin adaos. Partea întreagă.

### Partea fracționară

1. Să se scrie aproximările prin adaos cu o eroare mai mică decât  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  și  $10^{-4}$  ale numerelor:

a)  $x = 2,30121$